

3 SILOVÉ SÚSTAVY

Dve, alebo viac síl pôsobiacich na určitý objekt vytvára silovú sústavu. Silové sústavy delíme podľa usporiadania síl na

- rovinné silové sústavy,
- priestorové silové sústavy.

Ak všetky sily pôsobia v jednom bode, silová sústava sa nazýva *centrálna*. Ak pôsobiace sily majú rôzne pôsobiská, smery a orientáciu hovoríme o *všeobecnej* silovej sústave. Sústava, pri pôsobení ktorej ostáva hmotný objekt v pokoji, alebo priamočiarom rovnomernom pohybe sa nazýva rovnovážna silová sústava.

Silové sústavy, ktoré spôsobujú rovnaký pohybový stav určitého objektu sa nazývajú *ekvivalentné*. Dôležitou úlohou statiky je nájsť k danej silovej sústave čo najjednoduchšiu ekvivalentnú silovú sústavu. Hovoríme o nahradení, alebo tiež redukcií silových sústav. Platí, že ak dve silové sústavy majú rovnaké nahradenie, sú ekvivalentné. Ak nahradenie určitej silovej sústavy predstavuje rovnovážnu silovú sústavu, je daná silová sústava rovnovážna.

Niektoré silové sústavy možno nahradiť jedinou silou – *výslednicou silovej sústavy*.

Silová sústava má účinok

- posuvný,
- otáčavý.

3.1 CENTRÁLNA SILOVÁ SÚSTAVA, HMOTNÝ BOD V ROVINE A V PRIESTORE

V centrálnej silovej sústave nositeľky všetkých síl prechádzajú jedným bodom – centrom [1,2,4,6]. V tomto bode potom pôsobí aj výsledný účinok síl, resp. výslednica.

Majme pravouhlý súradnicový systém O, x, y, z . Nech sily $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_i, \dots, \mathbf{F}_n$ prechádzajú začiatočným bodom O , obr.3.1. Silová sústava $\mathbf{F}_i$ ($i = 1, \dots, n$) má výsledný

- posuvný účinok

$$\mathbf{F}_V = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{R}, \quad (3.1)$$

- otáčavý účinok k bodu O

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{iO} = \sum \mathbf{M}_{iO} = \mathbf{0}, \quad (3.2)$$

t.j. $\mathbf{R}$ je výslednica silovej sústavy.

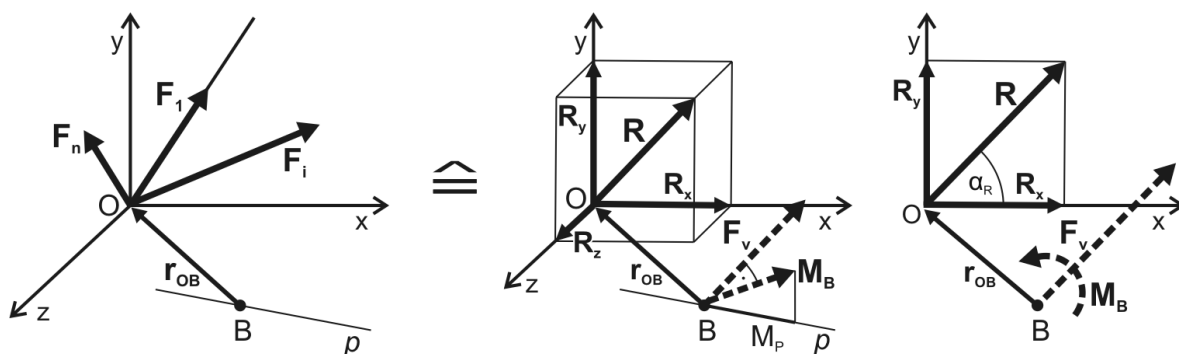
3.1.1 Centrálna priestorová silová sústava

Výslednica $\mathbf{R}$ centrálnej priestorovej silovej sústavy je v bode O jednoznačne určená tromi parametrami

$$\begin{aligned} R_x &= R \cos \alpha_R, \\ R_y &= R \cos \beta_R, \\ R_z &= R \cos \gamma_R. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Keď výslednicu $\mathbf{R}$ vyjadríme pomocou zložiek síl $\mathbf{F}_i$, dostaneme tri podmienky pre nahradenie silovej sústavy výslednicou v tvare

$$\begin{aligned} R_x &= \sum F_{ix} = \sum F_i \cos \alpha_i, \\ R_y &= \sum F_{iy} = \sum F_i \cos \beta_i, \\ R_z &= \sum F_{iz} = \sum F_i \cos \gamma_i. \end{aligned} \quad (3.4)$$



Obr. 3.1.

Veľkosť a polohu výslednice $\mathbf{R}$ určujú jej zložky R_x, R_y, R_z , pričom platí

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha_R &= \frac{R_x}{R}, \\ \cos \beta_R &= \frac{R_y}{R}, \\ \cos \gamma_R &= \frac{R_z}{R}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Podmienkou ekvivalencie pri nahradení sústavy síl $\sum \mathbf{F}_{i1}$ inou sústavou síl $\sum \mathbf{F}_{i2}$ je, že ich výslednica musí byť totožná, t.j. $\sum \mathbf{F}_{i1} = \mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_{i2}$.

Silová sústava prechádzajúca jedným bodom O má v ľubovoľnom bode B účinok

- posuvný

$$\mathbf{F}_V = \sum \mathbf{F}_i,$$

- otáčavý

$$\mathbf{M}_B = \sum \mathbf{M}_{iB} = \sum \mathbf{r}_{iB} \times \mathbf{F}_i.$$

Ak sa posunú všetky sily po svojich nositeľkách do bodu O, bude polohový vektor $\mathbf{r}_{iB} = \mathbf{r}_{OB}$ rovnaký pre všetky sily (obr.3.1), teda

$$\mathbf{M}_B = \sum \mathbf{M}_{iB} = \sum (\mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{F}_i) = \mathbf{r}_{OB} \times \left(\sum \mathbf{F}_i \right) = \mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{R}. \quad (3.7)$$

Rovnica (3.7) obsahuje závislosť $\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i$, teda nie je novou podmienkou, len náhradnou. Nie je to úplná náhrada, pretože ak by výslednica $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ prechádzala bodom B, platilo by $\mathbf{M}_B = \mathbf{0}$, teda aj $\sum \mathbf{M}_{iB} = \mathbf{0}$, pričom silová sústava nemusí byť v rovnováhe.

Centrálna priestorová silová sústava je v rovnováhe, ak výsledný účinok všetkých pôsobiacich síl sa rovná nule, t.j. ak platí

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}. \quad (3.8)$$

V skalárnom vyjadrení dostaneme tri navzájom nezávislé zložkové statické podmienky rovnováhy:

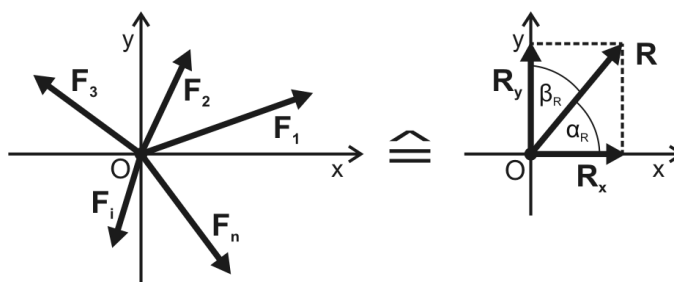
$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0, \\ \sum F_{iy} &= 0, \\ \sum F_{iz} &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Slovné vyjadrenie vzťahu (3.9) má tvar: *Algebraický súčet priemetov (zložiek) všetkých síl do troch nerovnoběžných, rôznoběžných, výhodne navzájom kolmých osí sa rovná nule.*

Z troch rovníc môžeme vyjadriť tri neznáme parametre síl, napr. tri zložky jednej neznámej sily, ktorá spolu so zadanými silami bude v rovnováhe. Môžu to byť napr. aj tri sily na daných nositeľkách a pod.

3.1.2 Centrálna rovinná silová sústava

Centrálna rovinná silová sústava je špeciálny prípad priestorovej silovej sústavy (obr.3.2).



Obr. 3.2.

Centrálnu rovinnú silovú sústavu v rovine xy prechádzajúcu bodom O môžeme nahradiť v bode O výslednicou $\mathbf{R}$, ktorá je jednoznačne určená dvoma parametrami

$$\begin{aligned} R_x &= R \cos \alpha_R, \\ R_y &= R \cos \beta_R. \end{aligned} \quad (3.10)$$



Keď rozpíšeme výslednicu $\mathbf{R}$ pomocou zložiek síl $\mathbf{F}_i$, dostaneme dve rovnice pre nahradenie silovej sústavy výslednicou

$$\begin{aligned} R_x &= \sum F_{ix} = \sum F_i \cos \alpha_i, \\ R_y &= \sum F_{iy} = \sum F_i \cos \beta_i. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dve veľkosti zložiek síl určujú veľkosť a polohu výslednice:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \\ \cos \alpha_R &= \frac{R_x}{R} \left(\cos \beta_R = \frac{R_y}{R} \right). \end{aligned}$$

Podmienkou ekvivalencie pri nahradení sústavy síl $\sum \mathbf{F}_{i1}$ inou sústavou síl $\sum \mathbf{F}_{i2}$ je, že ich výslednica musí byť totožná, t.j. $\sum \mathbf{F}_{i1} = \mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_{i2}$.

Centrálna rovinná silová sústava je v rovnováhe, ak výsledný účinok všetkých pôsobiacich síl sa rovná nule, t.j. ak platí

$$\mathbf{F}_V = \mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}. \quad (3.12)$$

V skalárnom vyjadrení dostaneme dve navzájom nezávislé zložkové statické podmienky rovnováhy:

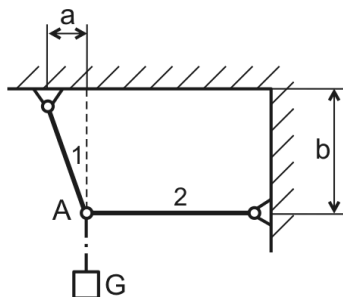
$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0, \\ \sum F_{iy} &= 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Slovné vyjadrenie vzťahu (3.13) má tvar: *Algebraický súčet zložiek všetkých síl do dvoch nerovnoběžných, rôznobežných, výhodne navzájom kolmých osí sa rovná nule.*

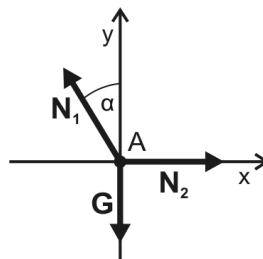
Z dvoch rovníc môžeme vyjadriť dva neznáme parametre síl, napr. dve zložky jednej neznámej sily, ktorá bude spolu so zadanými silami v rovnováhe. Môžu to byť aj napr. veľkosti dvoch síl na daných nositeľkách a pod.

Príklad 3.1 Rovnováha centrálnej rovinatej silovej sústavy.

Bremeno o tiaži $G = 500 \text{ N}$ visí na dvoch prútoch podľa obr. 3.3. Určte osové sily v prútoch N_1 , N_2 , ak sú dané rozmery $a = 1,5 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$.



Obr. 3.3.



Obr. 3.4.

Riešenie:

Riešime rovnováhu hmotného bodu A, ktorým prechádzajú osovú sily v prútoch a sila od tiaže bremena. Ide teda o rovinnú silovú sústavu prechádzajúcu jedným bodom, teda o centrálnu rovinnú silovú sústavu.

Tvarová i statická určitosť úlohy je určená vzťahom

$$i = i_s = v - u.$$

Bod A má dva stupne voľnosti pohybu ($v = 2$), prúty mu uberajú po jednom stupni voľnosti, teda

$$i = i_s = v - u = 2 - 2 \cdot 1 = 0.$$

Úloha je tvarovo i staticky určitá.

Uvoľníme bod A v rovine x, y a naznačíme všetky sily ktoré naň pôsobia (obr. 3.4). Sila G je známa (poznáme jej veľkosť a smer i orientáciu) a účinok odstránených väzieb predstavujú osovú sily v prútoch N_1, N_2 , pri ktorých nepoznáme veľkosť ani orientáciu (poznáme ich smer). Orientáciu neznámych síl N_1, N_2 volíme (obr. 3.4), napr. tak, aby reprezentovali ťahové namáhanie prútov.

Zložkové navzájom nezávislé statické podmienky rovnováhy majú tvar

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0; & N_2 - N_1 \sin \alpha &= 0, \\ \sum F_{iy} &= 0; & N_1 \cos \alpha - G &= 0, \end{aligned}$$

odkiaľ

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{G}{\cos \alpha} = 624 \text{ N}, \\ N_2 &= N_1 \sin \alpha = 375 \text{ N}, \end{aligned}$$

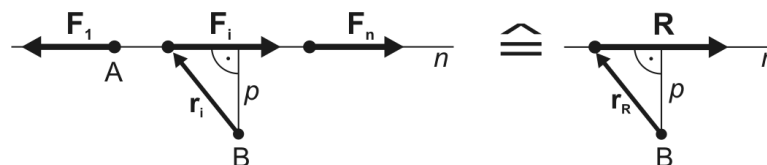
kde

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \rightarrow \alpha = 36^\circ 52'.$$

Osovú sily v prútoch $N_1 = 624 \text{ N}$, $N_2 = 375 \text{ N}$ majú kladné znamienka, takže sme predpokladali správne ich orientáciu.

3.2 PRIAMKOVÁ SILOVÁ SÚSTAVA

Priamková silová sústava je zvláštnym prípadom centrálnej silovej sústavy, pri ktorej všetky sily pôsobia na jednej nositeľke (obr. 3.5).



Obr. 3.5.

V ľubovoľnom bode A na nositeľke má každá sila iba posuvný účinok. Výslednica $\mathbf{R}$ pôsobí na tej istej nositeľke.



Silová sústava je v rovnováhe, keď platí

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}, \quad (3.14)$$

čo je splnené ak

$$\sum F_i = 0. \quad (3.15)$$

K dispozícii teda máme jednu statickú podmienku rovnováhy, z ktorej môžeme určiť jeden neznámy parameter, napr. veľkosť niektorej sily potrebnej pre rovnováhu.

Zložkovú rovnicu rovnováhy môžeme nahradiť momentovou podmienkou. V bode B, ktorý neleží na nositeľke silovej sústavy, má silová sústava účinok posuvný a otáčavý. Otáčavý účinok je určený vzťahom (obr. 3.5)

$$\mathbf{M}_B = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i. \quad (3.16)$$

Keďže nositeľka síl a bod B ležia v jednej rovine, vektor momentu $\mathbf{M}_B$ je kolmý na túto rovinu a jeho veľkosť je vyjadrená vzťahom

$$M_B = \sum M_{iB} = \sum p \cdot F_i = p \cdot \left(\sum F_i \right) = p \cdot R. \quad (3.17)$$

Ak $\sum F_i = 0$, musí platiť aj $\sum p \cdot F_i = p \cdot \sum F_i = 0$, t.j. zložkovú podmienku rovnováhy môžeme nahradiť momentovou podmienkou rovnováhy k bodu B v tvare

$$\sum M_{iB} = 0. \quad (3.18)$$

3.3 VŠEOBECNÉ SILOVÉ SÚSTAVY, TELESO V PRIESTORE A V ROVINE

3.3.1 Nahradenie a rovnováha všeobecnej priestorovej silovej sústavy

V prípade, že sily pôsobiace na teleso v priestore majú rôzne pôsobiská, smery a orientácie tvoria všeobecnú priestorovú silovú sústavu (obr.3.6)

Sily majú vzhľadom k vzťažnému bodu O posuvný aj otáčavý účinok. Pritom platí

$$\mathbf{F}_V = \sum \mathbf{F}_i, \quad (3.19)$$

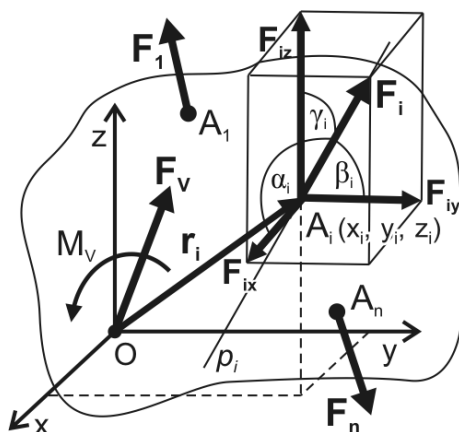
$$\mathbf{M}_V = \sum \mathbf{M}_i. \quad (3.20)$$

Zložkové silové rovnice majú tvar

$$\begin{aligned} F_{Vx} &= \sum F_{ix} = \sum F_i \cos \alpha_i, \\ F_{Vy} &= \sum F_{iy} = \sum F_i \cos \beta_i, \\ F_{Vz} &= \sum F_{iz} = \sum F_i \cos \gamma_i. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Momentové rovnice k osiam pre všeobecne zvolený začiatok súradnicového systému sú

$$\begin{aligned} M_{Vx} &= \sum M_{ix} = \sum (y_i \cos \gamma_i - z_i \cos \beta_i) F_i = \sum (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}), \\ M_{Vy} &= \sum M_{iy} = \sum (z_i \cos \alpha_i - x_i \cos \gamma_i) F_i = \sum (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}), \\ M_{Vz} &= \sum M_{iz} = \sum (x_i \cos \beta_i - y_i \cos \alpha_i) F_i = \sum (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}). \end{aligned} \quad (3.22)$$



Obr. 3.6.

Využitím vzťahov (3.21) a (3.22) môžeme určiť výsledný posuvný a otáčavý účinok silovej sústavy k bodu O v tvare

$$\begin{aligned} F_V &= \sqrt{F_{Vx}^2 + F_{Vy}^2 + F_{Vz}^2}, \\ M_V &= \sqrt{M_{Vx}^2 + M_{Vy}^2 + M_{Vz}^2}. \end{aligned}$$

Keďže vektory výsledného posuvného účinku $\mathbf{F}_V$ a otáčavého účinku $\mathbf{M}_V$ nemôžeme sčítat' do jednej sily, všeobecná priestorová silová sústava nemá výslednicu.

V priestore takto dostávame šesť podmienok rovnováhy

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0, & \sum M_{ix} &= 0, \\ \sum F_{iy} &= 0, & \sum M_{iy} &= 0, \\ \sum F_{iz} &= 0, & \sum M_{iz} &= 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Zložkové statické podmienky rovnováhy sa môžu nahradiť momentovými podmienkami k trom iným vhodne zvoleným osiam. Momentové podmienky rovnováhy ale nemôžeme nahradiť zložkovými podmienkami.

Ak je všeobecná silová sústava v rovnováhe, sú v rovnováhe i zložky síl do ľubovoľnej roviny.



3.3.2 Nahradenie a rovnováha rovnobežnej priestorovej silovej sústavy

Ravnobežná priestorová silová sústava je špeciálnym prípadom všeobecnej priestorovej silovej sústavy, kedy všetky sily majú rovnobežné nositeľky.

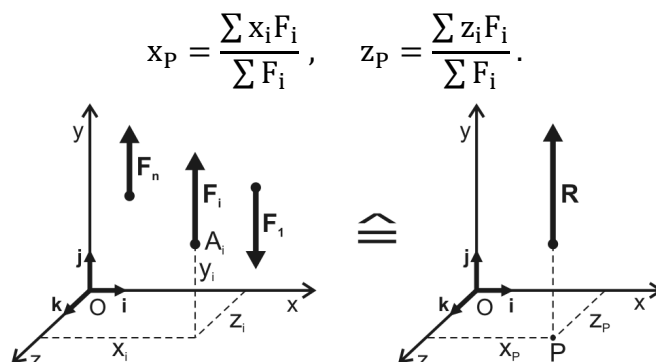
Nech sú sily rovnobežné napríklad s osou y . Potom zložkové a momentové rovnice pre účinok silovej sústavy k bodu O budú

$$\begin{aligned} F_{Vy} &= \sum F_i, \\ M_{Vx} &= \sum M_{ix} = - \sum z_i F_i, \\ M_{Vz} &= \sum M_{iz} = \sum x_i F_i. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Výsledný otáčavý účinok silovej sústavy určíme zo vzťahu

$$M_V = \sqrt{M_{Vx}^2 + M_{Vz}^2}.$$

Ravnobežná priestorová silová sústava má výslednicu $\mathbf{R}$, pričom platí $\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i$. Jej nositeľka je rovnobežná s nositeľkami síl $\mathbf{F}_i$ a rovinu xz pretína v bode P so súradnicami (obr.3.7)



Obr. 3.7.

Podmienky rovnováhy pre rovnobežnú priestorovú silovú sústavu sú

$$\begin{aligned} \sum F_i &= 0, \\ \sum M_{ix} &= - \sum z_i F_i = 0, \\ \sum M_{iz} &= \sum x_i F_i = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Pre nahradenie a rovnováhu rovnobežnej silovej sústavy v priestore máme tri nezávislé rovnice, z ktorých najmenej dve musia byť momentové. Ide o riešenie troch rovníc o troch neznámych, pričom zložkovú rovnicu môžeme nahradiť momentovou.

3.3.3 Nahradenie a rovnováha všeobecnej rovinatej silovej sústavy

Ak sily pôsobiace na teleso v rovine majú rôzne pôsobiská, smery a orientácie tvoria všeobecnú rovinnú silovú sústavu. Každá rovinná silová sústava sa dá nahradiť výslednicou, alebo silovou dvojicou v svojej rovine (obr. 3.8).

Vektorové rovnice nahradenia účinku všeobecnej rovinnej silovej sústavy k bodu O sú

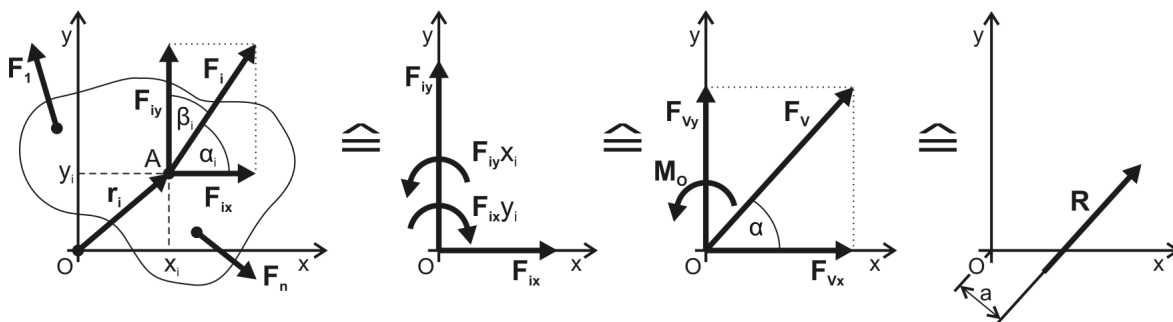
$$\mathbf{F}_V = \sum \mathbf{F}_i \quad (3.26)$$

pre posuvný účinok a

$$\mathbf{M}_O = \sum \mathbf{M}_i = \sum (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) \quad (3.27)$$

pre otáčavý účinok.

Výsledný vektor momentu $\mathbf{M}_O$ aj vektory momentov od jednotkových síl sú kolmé na rovinu xy.



Obr. 3.8.

Zložkové rovnice nahradenia sú

$$\begin{aligned} F_{Vx} &= \sum F_{ix} = \sum F_i \cos \alpha_i, \\ F_{Vy} &= \sum F_{iy} = \sum F_i \cos \beta_i, \\ M_O &= \sum M_{iO} = \sum (x_i \cos \beta_i - y_i \cos \alpha_i) F_i. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Výsledný posuvný účinok silovej sústavy k bodu O je

$$F_V = \sqrt{F_{Vx}^2 + F_{Vy}^2}.$$

Pre výslednicu $\mathbf{R}$ silovej sústavy platí $\mathbf{R} = \mathbf{F}_V$, pričom jej vzdialenosť a od bodu O je určená vzťahom

$$a = \frac{M_O}{R}.$$

Ak $R = 0$ a $M_O \neq 0$, silová sústava má len otáčavý účinok reprezentovaný silovou dvojicou.

Všeobecná rovinná silová sústava je v rovnováhe, ak má vzhľadom k ľubovoľnému bodu O nulový posuvný aj otáčavý účinok, t.j. ak platí

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_V &= \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_O &= \sum \mathbf{M}_i = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.29)$$



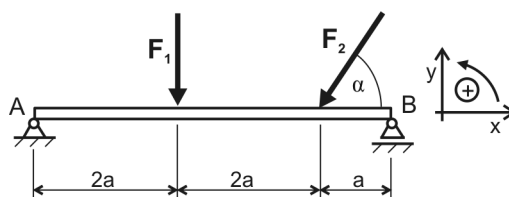
Z vektorových podmienok rovnováhy (3.29) môžeme získať dve skalárne zložkové podmienky rovnováhy a jednu skalárnu momentovú podmienku rovnováhy

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0, \\ \sum F_{iy} &= 0, \\ \sum M_{iO} &= 0.\end{aligned}\tag{3.30}$$

Máme teda k dispozícii tri navzájom nezávislé statické podmienky rovnováhy. Pri riešení rovnováhy všeobecnej rovinnej silovej sústavy môžeme pracovať s tromi neznámymi veličinami. Ktorúkoľvek zo zložkových rovníc môžeme nahradiť momentovou rovnicou k zvolenému bodu v rovine. Vzťažné osi, resp. body je pritom treba voliť tak, aby bola zabezpečená lineárna nezávislosť statických podmienok rovnováhy [1].

Príklad 3.2 Rovnováha všeobecnej rovinnej silovej sústavy.

Homogénny nosník AB dĺžky $5a$ uložený podľa obr. 3.9 je zaťažený silou $F_1 = 200\text{ N}$ a silou $F_2 = 300\text{ N}$, ktorej nositeľka zvierá s horizontálnou rovinou uhol $\alpha = 60^\circ$. Určte reakcie vo väzbách A a B, ak $a = 1\text{ m}$.



Obr. 3.9.

Riešenie:

Riešime rovnováhu telesa v rovine zaťaženého všeobecnou rovinnou silovou sústavou. Tvarovú i statickú určitosť úlohy zistíme podľa vzťahu

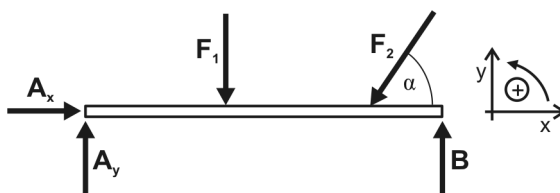
$$i = i_s = v - u.$$

Nosník AB má tri stupne voľnosti pohybu ($v = 3$), kĺb A odoberá dva stupne voľnosti (zabraňuje pohybu v smeroch osí x, y) a posuvné lôžko B odoberá jeden stupeň voľnosti pohybu (zabraňuje pohybu v smere y , kolmom na posuvné vedenie). Teda platí

$$i = i_s = v - u = 3 - 2 - 1 = 0.$$

Úloha je tvarovo i staticky určitá.

Uvoľníme nosník AB v rovine xy , naznačíme všetky sily, ktoré naň pôsobia a účinok odstránených väzieb nahradíme reakciami. Orientáciu neznámych síl A_x , A_y , B si volíme (obr. 3.10).



Obr. 3.10.

Zostavíme statické podmienky rovnováhy:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad A_x - F_2 \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad A_y - F_1 - F_2 \sin \alpha + B = 0,$$

$$\sum M_{iA} = 0; \quad -F_1 \cdot 2a - F_2 \sin \alpha \cdot 4a + B \cdot 5a = 0.$$

Dostali sme tri rovnice, z ktorých vieme vypočítať tri neznáme reakcie.

$$A_x = F_2 \cos \alpha = 300 \text{ N} \cdot \cos 60^\circ = 150 \text{ N},$$

$$B = \frac{F_1 \cdot 2a + F_2 \sin \alpha \cdot 4a}{5a} = \frac{200 \text{ N} \cdot 2 \cdot 1 \text{ m} + 300 \text{ N} \cdot \sin 60^\circ \cdot 4 \cdot 1 \text{ m}}{5 \cdot 1 \text{ m}} = 287,84 \text{ N},$$

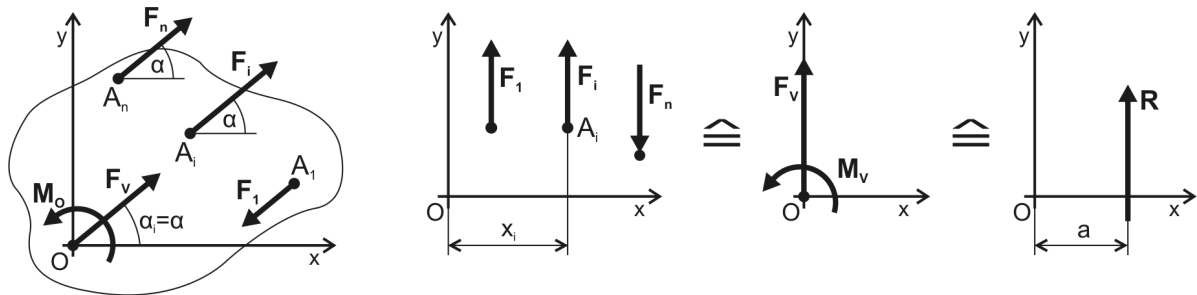
$$A_y = F_1 + F_2 \sin \alpha - B = 200 \text{ N} + 300 \text{ N} \cdot \sin 60^\circ - 287,84 \text{ N} = 171,97 \text{ N}.$$

Výslednú reakciu A vypočítame podľa Pytagorovej vety:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{150^2 + 171,97^2} = 228,2 \text{ N}.$$

3.3.4 Nahradenie a rovnováha rovnobežnej rovinnej silovej sústavy

Sústava rovnobežných síl v rovine, obr. 3.11, je zvláštnym prípadom všeobecnej rovinnej silovej sústavy. Pre nahradenie rovnobežnej silovej sústavy preto platia vektorové rovnice (3.26) a (3.27).



Obr. 3.11.

Sily ležiace v jednej rovine sú rovnobežné, t.j. všetky uhly $\alpha_i = \alpha$ sú rovnaké. Potom z dvoch podmienok nahradenia

$$F_{Vx} = \sum F_{ix} = \sum F_i \cos \alpha_i,$$

$$F_{Vy} = \sum F_{iy} = \sum F_i \sin \alpha_i,$$

dostaneme jednu

$$F_V = \sqrt{F_{Vx}^2 + F_{Vy}^2} = \sum F_i \sqrt{\cos^2 \alpha_i + \sin^2 \alpha_i} = \sum F_i. \quad (3.31)$$

Výsledná sila F_V je teda rovnobežná so silami F_i a jej veľkosť je rovná ich algebrickému súčtu.



Nech silová sústava je rovnobežná napr. s osou y (obr. 3.11). Potom zložkové rovnice nahradenia budú

$$\begin{aligned} F_V &= \sum F_{iy} = \sum F_i, \\ M_V &= \sum M_{iO} = x F_V = \sum x_i F_i. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Polohu výslednice $R = \sum F_i = F_V$ určíme zo vzťahu

$$a = \frac{M_V}{R} = \frac{\sum x_i F_i}{\sum F_i}.$$

Ak $R = 0$ a $M_V \neq 0$, silová sústava má iba otáčavý účinok reprezentovaný silovou dvojicou.

Podmienky rovnováhy rovnobežnej rovinnej silovej sústavy sú

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_V &= \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_V &= \sum \mathbf{M}_i = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Skalárne vyjadrenie podmienok rovnováhy dáva vzťahy

$$\begin{aligned} \sum F_{iy} &= \sum F_i = 0, \\ \sum M_{iO} &= \sum x_i F_i = 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Máme teda k dispozícii dve navzájom nezávislé statické podmienky rovnováhy (jednu zložkovú a jednu momentovú), čo nám umožňuje určiť dva neznáme parametre väzbových reakcií. Zložkovú podmienku rovnováhy môžeme nahradiť momentovou podmienkou rovnováhy k inému bodu. Spojnica bodov, ku ktorým zostavujeme momentové podmienky, nesmie byť rovnobežná s nositeľkami síl silovej sústavy, pretože prípadná výslednica by mohla prechádzať týmito bodmi a pritom by boli splnené obidve momentové podmienky rovnováhy.

3.4 STREDISKO SÚSTAVY VIAZANÝCH ROVNOBEŽNÝCH SÍL, SPOJITÉ ZAŤAŽENIE

3.4.1 Stredisko sústavy viazaných rovnobežných síl

V mnohých prípadoch sa stretávame so sústavami síl, ktorých pôsobiská sú viazané k určitým bodom telesa. Výslednica týchto síl je potom tiež viazaná k určitému bodu S telesa, ktorý nazývame strediskom sústavy viazaných síl.

Majme nerovnovážnu sústavu síl $\mathbf{F}_i$, ktoré ležia na rovnobežných nositeľkách n_i , pôsobiacich na teleso v bodoch A_i , s polohovými vektormi $\mathbf{r}_i$ vzhľadom na ľubovoľný bod O vztážneho priestoru (obr. 3.12).

Danú silovú sústavu môžeme nahradiť ekvivalentne jedinou výslednicou $\mathbf{R}$, pre ktorú platí

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i. \quad (3.34)$$

Pretože moment k zvolenému bodu O je

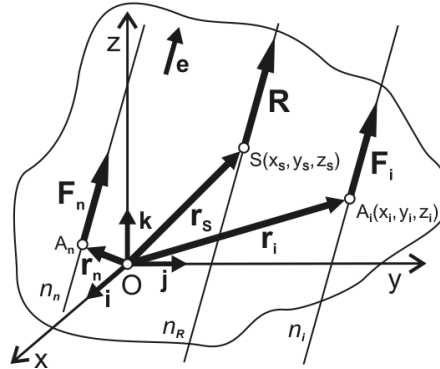
$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_S \times \mathbf{R}$$

a súčasne

$$\mathbf{M}_O = \sum (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i),$$

platí

$$\mathbf{r}_S \times \mathbf{R} = \sum (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i). \quad (3.35)$$



Obr. 3.12.

Zavedením jednotkového vektora $\mathbf{e}$ v smere nositeliek síl môžeme vzťah (3.35) zapísať v tvare

$$\mathbf{r}_S \times \left(\sum F_i \right) \mathbf{e} = \left(\sum \mathbf{r}_i \times F_i \mathbf{e} \right). \quad (3.36)$$

Po úprave dostaneme

$$\left(\sum F_i \right) \mathbf{r}_S - \sum F_i \mathbf{r}_i = \mathbf{0}. \quad (3.37)$$

Polohový vektor bodu S ako pôsobisko výslednice $\mathbf{R}$ danej sústavy viazaných rovnobežných síl určíme zo vzťahu (3.37)

$$\mathbf{r}_S = \frac{\sum F_i \mathbf{r}_i}{\sum F_i}. \quad (3.38)$$

Vektor $\mathbf{r}_S$ nezávisí od jednotkového smerového vektora $\mathbf{e}$, čiže nezávisí od smeru uvažovanej sústavy rovnobežných síl. Poloha strediska sústavy síl sa nezmení, ak zmeníme sily sústavy v rovnakom pomere. Priemetom do osí x, y, z zvolenej súradnicovej sústavy dostávame súradnice strediska :

$$x_S = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}, \quad y_S = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}, \quad z_S = \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i}. \quad (3.39)$$

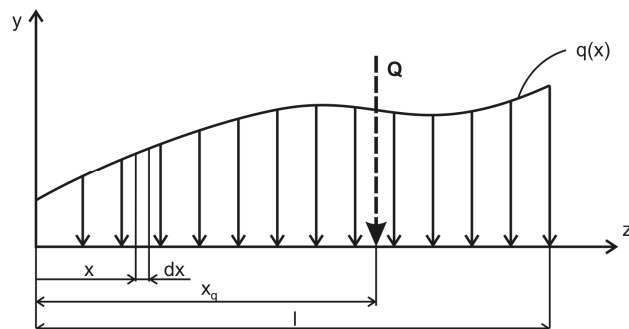
Súčin $\sum F_i \mathbf{r}_i$, resp. súčiny $\sum F_i x_i$, $\sum F_i y_i$, $\sum F_i z_i$, vyjadrujú statické momenty jednotlivých síl k bodu O.

Veta: Statický moment sústavy vzájomne rovnobežných síl vzhľadom na určitý prvok (bod, rovinu, os) je rovný statickému momentu výslednice tejto sústavy síl k tomu istému prvku.

3.4.2 Spojité zaťaženie

Spojitém zaťažením nazývame sústavu rovnobežných síl, ktoré sú spojito rozložené po ploche, čiare alebo objeme (obr. 3.13). Na element plochy, resp. dĺžky pôsobia tzv. elementárne sily, ktorých veľkosť je definovaná fyzikálnou závislosťou.

Intenzita zaťaženia q je určená silou pripadajúcou na jednotku dĺžky, resp. plochy. Udáva sa preto v $[N/m]$, resp. $[N/m^2]$.



Obr. 3.13.

Elementárna sila dQ sa rovná súčinu intenzity zaťaženia a elementárnej veľkosti elementu, na ktorý pôsobí, t.j.

$$dQ = q(x)dx. \quad (3.40)$$

Výsledná sila potom je

$$Q = \int_{(\ell)} dQ = \int_0^{\ell} q(x)dx. \quad (3.41)$$

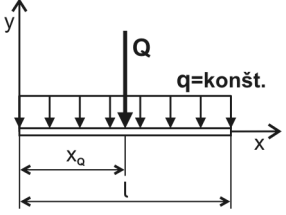
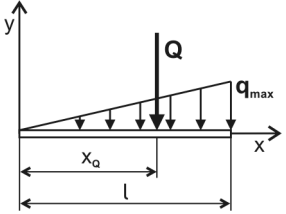
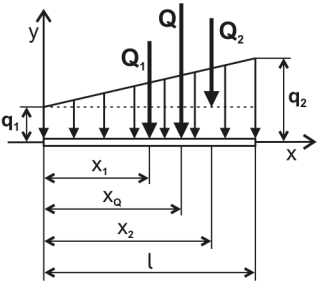
Veľkosť výslednej sily Q sa rovná ploche ohraničenej osou x a spojitým zaťažením q . Vektor výslednej sily pôsobí v ťažisku plochy.

Polohu výslednice môžeme určiť podľa vzťahu (3.38). Súčet statických momentov jednotlivých rovnobežných síl sa rovná statickému momentu ich výslednice, t.j. platí

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell} x q(x)dx &= x_Q Q, \\ \int_0^{\ell} x q(x)dx &= x_Q \int_0^{\ell} q(x)dx, \\ x_Q &= \frac{\int_0^{\ell} x q(x)dx}{\int_0^{\ell} q(x)dx}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

V tab. 3.1 sú uvedené základné typy spojitého zaťaženia, ako aj veľkosť a poloha výslednice Q .

Tab. 3.1

Spojité zaťaženie	Veľkosť výslednice	Poloha výslednice
Rovnomerne rozložené zaťaženie 	$Q = q \cdot l$	$x_Q = \frac{1}{2} \cdot l$
Trojuholníkové zaťaženie 	$Q = \frac{1}{2} \cdot q_{\max} \cdot l$	$x_Q = \frac{2}{3} \cdot l$
Lichobežníkové zaťaženie 	$Q = Q_1 + Q_2$ $Q_1 = q_1 \cdot l$ $Q_2 = \frac{1}{2} (q_2 - q_1) \cdot l$	$x_{Q1} = \frac{1}{2} \cdot l$ $x_{Q2} = \frac{2}{3} \cdot l$ $x_{Q1} Q_1 + x_{Q2} Q_2 = x_Q Q$ $x_Q = \frac{x_{Q1} Q_1 + x_{Q2} Q_2}{Q}$

4 ROVINNÉ PRÚTOVÉ SÚSTAVY

Prúťová sústava vznikne spojením viacerých prútov (tyčí) v spoločných bodoch – styčníkoch [1,2,4]. Prierezová plocha prútov môže byť rôzna a po dĺžke prúta je spravidla konštantná. Za predpokladu, že styčníky predstavujú rotačné kĺby bez trenia, prúty prenášajú len osovú vnútornú silu. Tento predpoklad je vyhovujúci, ak je dĺžka prúta v porovnaní s jeho prierezovou plochou výrazne prevažujúcim rozmerom prúta. Potom je možné skutočné spojenia prútov (skrutkový spoj, zvarovaný spoj, nitovaný spoj, a iné) považovať za tzv. ideálne kĺby. Typickým príkladom prúťovej sústavy je napr. mostová konštrukcia, obr. 4.1. Na obr.4.2 sú znázornené príklady reálneho spojenia prútov v prúťovej sústave.



a)



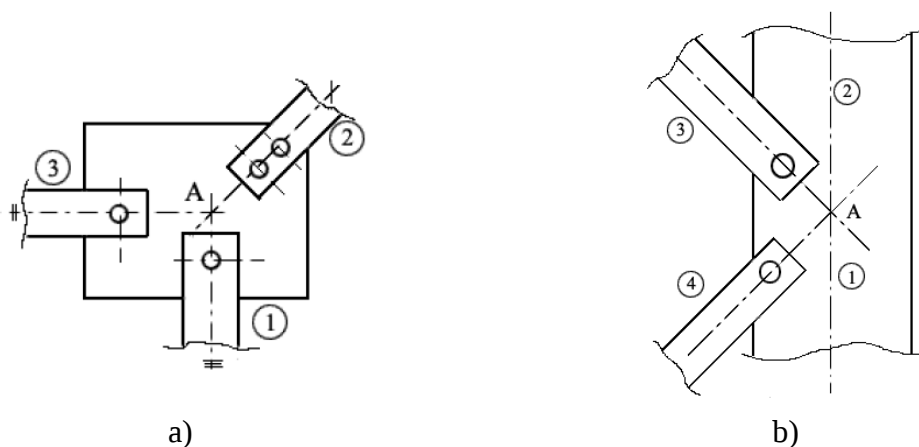
b)

Obr. 4.1

Prúťová sústava je zaťažená len sústredenými silami s pôsobiskom v styčníkoch. Spojité zaťaženia, ako je vlastná tiaž, sila vetra, tiaž námrazy a pod., je preto potrebné ekvivalentne pretransformovať do sústredených síl pôsobiacich v styčníkoch.

Prúty predstavujú vnútornú väzbu medzi dvoma hmotnými bodmi - styčníkmi. Tieto väzby odoberajú hmotnému bodu jeden stupeň voľnosti pohybu v smere osi prúta. Ak

odstránime vnútorné väzby medzi hmotnými bodmi, musíme ich nahradiť vnútornými väzbovými reakciami, ktoré sa nazývajú osovú sily v prútoch a označujú sa písmeno N_i , kde i je číslo prúta.



Obr. 4.2

Prúty sústavy sú namáhané osovými silami na ťah, alebo tlak. Ich veľkosť a orientácia je závislá na geometrii prútovej sústavy, zaťažujúcich vonkajších silách a uložení prútovej sústavy prostredníctvom vonkajších väzieb.

Kladná osová sila (ťahová) je orientovaná von z mysleného rezu prúta, resp. von zo styčníka. Záporná osová sila (tlaková) je orientovaná v zmysle do mysleného rezu, resp. do styčníka. Pri výpočtoch budeme vždy predpokladať kladnú osovú silu v prúte.

Odstránením prútov a ich náhradou osovými silami, ako aj odstránením vonkajších väzieb a ich náhradou vonkajšími väzbovými reakciami, dostaneme sústavu hmotných bodov v rovine. Táto sústava je v statickej rovnováhe, ak je v rovnováhe každý hmotný bod, t.j. keď sú splnené statické podmienky rovnováhy.

Podľa geometrie prútovej sústavy a jej zaťaženia rozoznávame:

- rovinné prútové sústavy,
- priestorové prútové sústavy.

Prúty, styčníky i vonkajšie sily rovinatej prútovej sústavy ležia v jednej rovine. Prúty, styčníky i vonkajšie sily priestorovej prútovej sústavy sú všeobecne rozložené v priestore.

Špeciálne priestorové prútové sústavy, ktorých prúty ležia vo vzájomne na seba kolmých rovinách možno rozložiť na rovinné prútové sústavy. Prúty v každej z rovín sústavy prenášajú silové účinky síl ležiacich v tej istej rovine. Tým možno riešenie špeciálnej priestorovej prútovej sústavy rozložiť na riešenie viacerých rovinných úloh. V ďalšej časti učebnice sa budeme zaoberať výlučne rovinnými prútovými sústavami.

4.1 STATICKÁ URČITOSŤ ROVINNÝCH PRÚTOVÝCH SÚSTAV

Statická analýza rovinných prútových sústav závisí aj od statickej určitosti úlohy. Pri prútových sústavách rozlišujeme vonkajšiu a vnútornú statickú určitosť. Prútová sústava je staticky určitá, ak je staticky určitou sústavou tak po vnútornej ako aj po vonkajšej stránke. V opačnom prípade pôjde o staticky neurčitú prútovú sústavu.



Vonkajšia statická určitosť je závislá od počtu odobraných stupňov voľnosti celej prútovej sústavy (ako jedného telesa) vonkajšími väzbami a vypočítame ju podľa vzťahu

$$i_{\text{von}} = v_{\text{von}} + u_{\text{von}} = 3 - u_{\text{von}},$$

kde u je počet stupňov voľnosti pohybu odobratých vonkajšími väzbami. Prútová sústava je zvonkue staticky určitá, ak $i_{\text{von}} = 0$, t.j. ak $u_{\text{von}} = 3$. V opačnom prípade ide o zvonku staticky neurčité uloženie. Z hľadiska vonkajšej statickej určitosti prútovej sústavy je nutné prútovej sústave odobrať minimálne tri stupne voľnosti vonkajšími väzbami.

Vnútorňú statickú určitosť i prútovej sústavy možno stanoviť zo vzťahu

$$i = 2s - p - u_{\text{von}} = 2s - p - 3, \quad (4.1)$$

kde s je počet styčníc a p je počet prútov.

Sústava je vnútorne staticky určitá, ak $i = 0$, t.j. ak je splnená podmienka $2s - p = 3$.

Ak je prútová sústava staticky určitá, na výpočet osových síl a vonkajších väzbových reakcií postačujú statické podmienky rovnováhy. Teplotné namáhanie, poddajnosť vonkajších väzieb ako aj výrobná nepresnosť nespôsobujú, na rozdiel od staticky neurčitých úloh, vznik vnútorných síl a väzbových reakcií. Pri staticky neurčitých prútových sústavách musíme statické podmienky rovnováhy doplniť deformačnými podmienkami. Veľkosť osových síl v staticky určitej prútovej sústave je teda závislá aj od veľkosti prierezov jednotlivých prútov a od ich materiálových vlastností.

Vo všeobecnosti platí, že rovinná prútová sústava je vnútorne staticky určitá, ak ju vytvárame pridávaním styčníc pripevnených vždy dvoma prútmi.

4.2 METÓDY STATICKEJ ANALÝZY PRÚTOVÝCH SÚSTAV

Metódami statiky možno riešiť len staticky určité prútové sústavy. Týmto metódami možno určiť vonkajšie väzbové reakcie a vnútorné sily v prútoch. Na výpočet deformácie prútových sústav, alebo na analýzu staticky neurčitých úloh je potrebné použiť vzťahy z oblasti pružnosti a pevnosti. V ďalšom sa v rámci statiky budeme zaoberať riešením len staticky určitých prútových sústav. Cieľom riešenia bude určenie statickej určitosti, ako aj výpočet vonkajších väzbových reakcií a osových síl v prútoch.

Metódy riešenia prútových sústav sa všeobecne delia na:

- analytické,
- grafické,
- počítačovo orientované.

Každá skupina týchto metód obsahuje viacero konkrétnych postupov riešenia. Nástup počítačov urýchlil prudký rozvoj numerických metód mechaniky. Prednosti numerických metód, napr. metódy konečných prvkov (MKP), posunuli do úzadia v minulosti veľmi často používané grafické metódy (napr. Cremonov obrazec, Wiliottov plán, a pod.), ktoré sa v súčasnosti už nepoužívajú. Kvôli vysvetleniu fyzikálnej podstaty problému uvedieme v ďalšom dve najpoužívanejšie analytické metódy riešenia statiky prútových sústav, a to styčnícovú a priesečnú metódu.

4.2.1 Metóda styčných bodov

Princíp metódy vychádza z podmienok rovnováhy sústavy hmotných bodov. Hmotný bod je v tomto prípade uvoľnený styčník, v ktorom pôsobia známe vonkajšie sily a vonkajšie väzbové reakcie, ako aj neznáme osovú sily styčníkom spojených prútov.

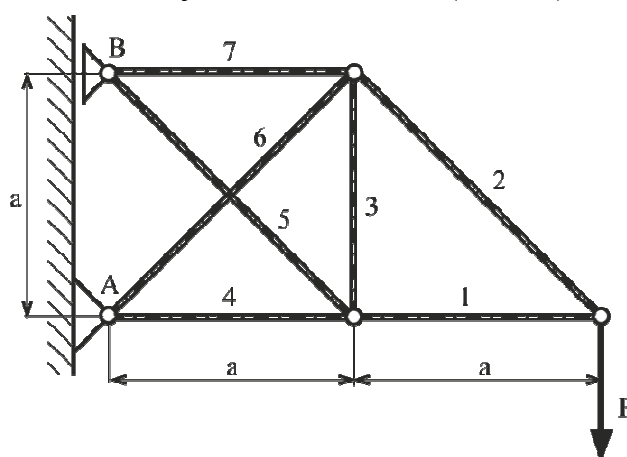
Postup výpočtu je nasledovný:

Uvoľníme prútovú sústavu z vonkajších väzieb a z podmienok rovnováhy celej prútovej sústavy vypočítame vonkajšie väzbové reakcie, z podmienok rovnováhy síl uvoľnených styčníkov vypočítame neznáme osovú sily v prútoch. Pri riešení rovnováhy vychádzame zo styčníka, v ktorom pôsobia vonkajšie sily (alebo známe vonkajšie reakcie), a maximálne dve neznáme osovú sily.

Prútom, v ktorých je nulová sila sa hovorí nulové prúty. Aj keď tieto prúty nie sú namáhané pre daný zaťažovací stav, musia byť v prútovej sústave prítomné, pretože zabezpečujú tvar prútovej sústavy.

Príklad 3.1 Riešenie prútovej sústavy metódou styčných bodov

Je daná prútová sústava, ktorá je zaťažená silou $F = 100 \text{ N}$. Určte osovú sily vo všetkých prútoch a reakcie vo vonkajších väzbách A a B (obr. 4.3).



Obr. 4.3

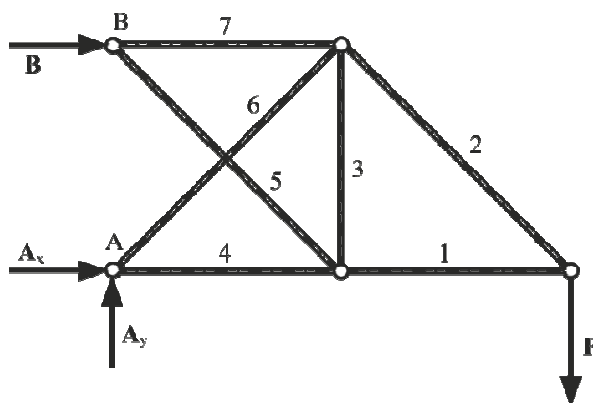
Riešenie:

Určíme vonkajší a vnútorný počet stupňov voľnosti pohybu.

$$i_{\text{von}} = v_{\text{von}} - u_{\text{von}} = 3 - 2 - 1 = 0,$$

$$i = 2s - p - u_{\text{von}} = 2 \cdot 5 - 7 - 2 - 1 = 0.$$

Uvoľníme si prútovú sústavu z vonkajších väzieb ako jedno teleso, ktoré je uchytené kĺbom a posuvným lôžkom (obr. 4.4).



Obr. 4.4

Podmienky rovnováhy prútovej sústavy ako jedného telesa (obr. 4.4)

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0; & A_x + B &= 0, \\ \sum F_{iy} &= 0; & A_y - F &= 0, \\ \sum M_{iA} &= 0; & -F \cdot 2a - B \cdot a &= 0.\end{aligned}$$

Z podmienok rovnováhy si vyjadríme veľkosti reakcií

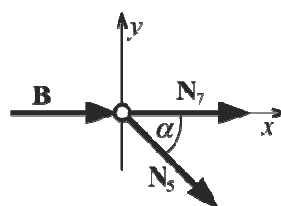
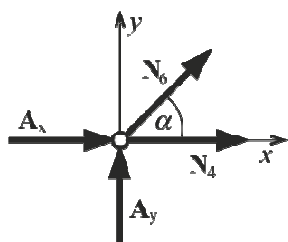
$$\begin{aligned}A_y &= F = 100 \text{ N}, \\ B &= -2F = -200 \text{ N}, \\ A_x &= -B = -(-2F) = 200 \text{ N}, \\ A &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(200 \text{ N})^2 + (100 \text{ N})^2} = 223,6 \text{ N}.\end{aligned}$$

Postupným uvoľňovaním styčníc ako hmotných bodov vieme pre každý z nich vyjadriť podmienky rovnováhy, z ktorých vypočítame osovú sily v jednotlivých prútoch. Na obr. 4.5 je uvoľnený styčník A, pre ktorý platia nasledujúce podmienky rovnováhy

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0; & A_x + N_4 + N_6 \cos \alpha &= 0, \\ \sum F_{iy} &= 0; & A_y + N_6 \sin \alpha &= 0.\end{aligned}$$

Z podmienok rovnováhy pre styčník A vyjadríme neznáme osovú sily v prútoch

$$\begin{aligned}N_6 &= \frac{-A_y}{\sin \alpha} = -\frac{F}{\sin \alpha} = -\frac{100 \text{ N}}{\sin 45^\circ} = -141 \text{ N}, \\ N_4 &= -A_x - N_6 \cos \alpha = -200 \text{ N} - \left(-\frac{100 \text{ N}}{\sin 45^\circ}\right) \cos 45^\circ = -100 \text{ N}.\end{aligned}$$



Obr. 4.5

Obr. 4.6

Pre uvoľnený styčník B (obr. 4.6) platia podmienky rovnováhy:

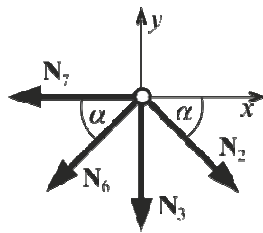
$$\sum F_{ix} = 0; \quad B + N_7 + N_5 \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -N_5 \sin \alpha = 0,$$

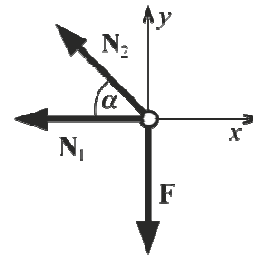
odkiaľ

$$N_5 = 0 \text{ N},$$

$$N_7 = -B - N_5 \cos \alpha = -B = -(-200 \text{ N}) = 200 \text{ N}.$$



Obr. 4.7



Obr. 4.8

Podmienky rovnováhy pre styčník I (obr. 4.7)

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -N_7 - N_6 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -N_6 \sin \alpha - N_3 - N_2 \sin \alpha = 0,$$

odkiaľ

$$N_2 = \frac{N_7 + N_6 \cos \alpha}{\cos \alpha} = \frac{200 \text{ N} + \left(-\frac{100 \text{ N}}{\sin 45^\circ}\right) \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = 141 \text{ N},$$

$$N_3 = -N_6 \sin \alpha - N_2 \sin \alpha = -(-141 \text{ N}) \sin 45^\circ - (141 \text{ N}) \sin 45^\circ = 0 \text{ N}.$$

Podmienky rovnováhy pre styčník II (obr. 4.8)

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -N_1 - N_2 \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -F + N_2 \sin \alpha = 0,$$

odkiaľ

$$N_2 = \frac{F}{\sin \alpha} = \frac{100 \text{ N}}{\sin 45^\circ} = 141 \text{ N},$$

$$N_1 = -N_2 \cos \alpha = -\frac{100 \text{ N}}{\sin 45^\circ} \cos 45^\circ = 100 \text{ N}.$$

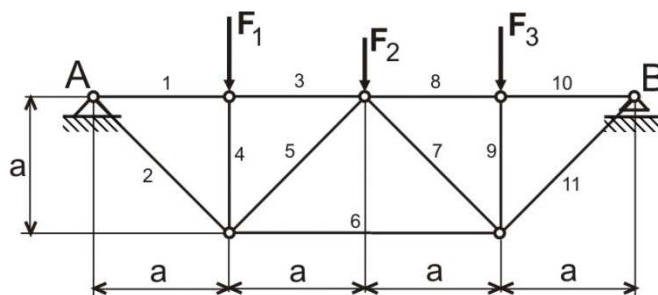
Uvoľnením posledného bodu III dostávame podmienky rovnováhy, v ktorých sú všetky osovú sily v prútoch už známe, preto ich môžeme použiť na kontrolu.

4.2.2 Priesečná metóda (Ritterov rez)

Princíp metódy vychádza z podmienok statickej rovnováhy časti prútovej sústavy odrezanej myslenným rezom cez maximálne tri prúty nepretínajúce sa v jednom bode. Osové sily v rozrezaných prútoch a vonkajšie sily pôsobiace na odrezanú časť prútovej sústavy musia tvoriť rovnovážnu silovú sústavu. Momentové statické podmienky rovnováhy odrezanej časti prútovej sústavy treba písať k bodom, ktoré sú priesečníkom osí dvoch rozrezaných prútov. V niektorých úlohách takáto možnosť neexistuje, v takom prípade treba použiť zložkové statické podmienky rovnováhy.

Príklad 3.2 Riešenie prútovej sústavy priesečnou metódou.

Priesečnou metódou určte osové sily N_3 , N_5 a N_6 v prútoch danej rovinatej prútovej sústavy (obr.4.9), ktorá je zaťažaná vonkajšími silami $F_1 = 4 \text{ kN}$, $F_2 = 2 \text{ kN}$, $F_3 = 3 \text{ kN}$, ak rozmer $a = 2 \text{ m}$.



Obr. 4.9

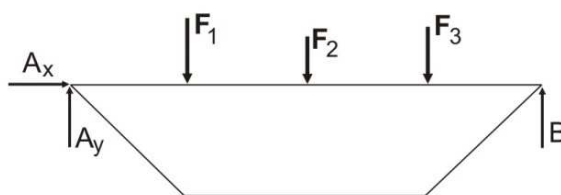
Riešenie:

Postup posúdenia statickej určitosti a výpočtu reakcií vo vonkajších väzbách je rovnaký pre obidve metódy. Určíme vonkajší a vnútorný počet stupňov voľnosti pohybu.

$$i_{\text{von}} = v_{\text{von}} - u_{\text{von}} = 3 - 2 - 1 = 0,$$

$$i = 2s - p - u_{\text{von}} = 2 \cdot 7 - 11 - 2 - 1 = 0.$$

Uvoľnenie prútovej sústavy ako jedného telesa je na obr. 4.10.



Obr. 4.10

Podmienky rovnováhy pre prútovú sústavu ako jedno teleso sú

$$\sum F_{ix} = 0; \quad A_x = 0,$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad A_y + B - F_1 - F_2 - F_3 = 0,$$

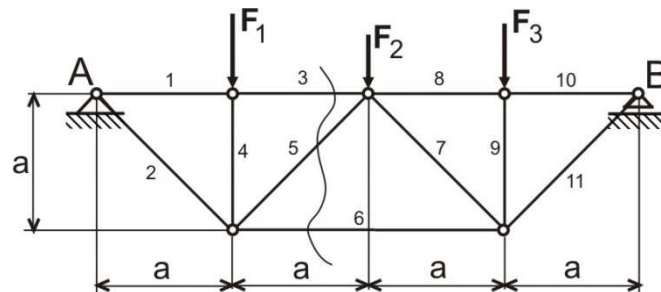
$$\sum M_{iA} = 0; \quad -F_1 \cdot a - F_2 \cdot 2a - F_3 \cdot 3a + B \cdot 4a = 0,$$

odkiaľ vypočítame reakcie vo vonkajších väzbách

$$B = \frac{F_1 \cdot a + F_2 \cdot 2a + F_3 \cdot 3a}{4a} = \frac{4 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} + 2 \text{ kN} \cdot 2 \cdot 2 \text{ m} + 3 \text{ kN} \cdot 3 \cdot 2 \text{ m}}{4 \cdot 2 \text{ m}}$$

$$B = 4,25 \text{ kN},$$

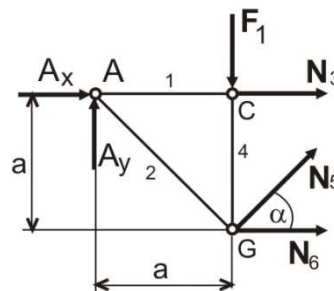
$$A_y = F_1 + F_2 + F_3 - B = 4 \text{ kN} + 2 \text{ kN} + 3 \text{ kN} - 4,25 \text{ kN} = 4,75 \text{ kN}.$$



Obr. 4.11

Pri metóde rezu robíme rez prútmi, ktorých osovú silu chceme určiť. Mysleným rezom rozrezané prúty však nesmú prechádzať jedným bodom, obr.4.11.

Uvoľníme mysleným rezom odrezanú časť a v miestach rozrezaných prútov zavedieme osovú silu, obr.4.12.



Obr. 4.12

Mysleným rezom oddelená časť prútovej sústavy tvorí tuhé teleso, pre ktoré napíšeme statické podmienky rovnováhy:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad A_x + N_3 + N_6 + N_5 \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad A_y - F_1 + N_5 \sin \alpha = 0,$$

$$\sum M_{iG} = 0; \quad -A_x \cdot a - A_y \cdot a - N_3 \cdot a = 0,$$

alebo

$$\sum M_{iA} = 0; \quad -F_1 \cdot a + N_5 \sin \alpha \cdot a + N_5 \cos \alpha \cdot a + N_6 \cdot a = 0.$$

Z týchto podmienok rovnováhy vieme vypočítať tri neznáme osovú silu v prútoch 3, 5 a 6.

Uhol α vieme vyjadriť z geometrie prútovej sústavy (obr. 4.9). Platí

$$\tan \alpha = \frac{a}{a} = 1 \rightarrow \alpha = 45^\circ.$$